## 1.2.2. EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE B

**REPUBLIQUE GABONAISE**
**DIRECTION DU BACCALAUREAT**

**2016 - MATHEMATIQUES**
**Série : B**
**Durée : 3 heures**
**coef : 3**

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**<u>EXERCICE 1</u> : Suites numériques (5 points)**

Deux Petites et Moyennes Entreprises (PME) A et B de sciage de bois se sont installées à MAKOKOU.

En 2015, les PME A et B ont réalisé les chiffres d'affaires différents :

- le chiffre d'affaire de la PME A est de 5 000 000 F CFA. Cette PME prévoit une augmentation régulière de ce chiffre d'affaire de 4% par an.
- le chiffre d'affaire de la PME B est de 4 500 000 F CFA. Cette PME prévoit une augmentation régulière de ce chiffre d'affaire de 4 ,5% par an.

On vous propose de comparer les chiffres d'affaire de ces deux entreprises en répondant aux questions ci-dessous.

1) Calculer pour chacune des PME A et B, les chiffres d'affaires prévus pour les années 2016 et 2017.
2) Pour la PME A, on note $A_0 = 5\ 000\ 000$ , le chiffre d'affaire de l'année 2015 et $A_n$ le chiffre d'affaire de l'année 2015+ $n$ ( $n \in \mathbb{N}$).

   Pour la PME B, on note $B_0 = 4\ 500\ 000$ le chiffre d'affaire de l'année 2015 et $B_n$ le chiffre d'affaire de l'année 2015+ $n$ ( $n \in \mathbb{N}$).

   a) Justifier que : $A_{n+1} = 1{,}04\, A_n$ et $B_{n+1} = 1{,}045\, B_n$

   b) En déduire que $(A_n)$ et $(B_n)$ sont des suites géométriques. Préciser le premier terme et la raison de chaque suite.

   c) Exprimer $A_n$ en fonction de $A_0$ et $n$ puis $B_n$ en fonction de $B_0$ et $n$.
3) On pose : $C_n = A_n - B_n$

   a) Justifier que :$C_n = 5\ 000\ 000(1{,}04)^n - 4\ 500\ 000(1{,}045)^n$

   b) Etablir que :$C_n > 0$ équivaut à $\left(\frac{1{,}04}{1{,}045}\right)^n > \frac{9}{10}$

   c) Vérifier que : $\left(\frac{1{,}04}{1{,}045}\right)^n > \frac{9}{10}$ équivaut à $n < 21{,}96$

   d) En quelle année le chiffre d'affaire de la PME A dépassera-t-il celui de la PME B ?

**Exercice 2**. **Statistiques (5 points)**

Le tableau ci-dessous indique l'évolution d'une production agricole de manioc dans la ville de LEBAMBA

.

| Année | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
| Production $y_i$ (kg) | 550 | 750 | 1200 | 1600 | 2200 |

1) Tracer le nuage de points $M_i(x_i;\, y_i)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques : 1 cm pour 5 années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 200 kg sur l'axe des ordonnées.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.
3) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de $y$ en $x$ obtenue par la méthode de Mayer. On prendra pour $G_1$ le point moyen des trois premiers points du système et $G_2$ celui des deux derniers points.
4) Calculer la production que l'on peut prévoir en 2020 en utilisant cet ajustement (le résultat sera arrondi en milliers).
5) Une équation de la droite d'ajustement (D') de $y$ en $x$ obtenue par la méthode des moindres carrées est : $y = 41{,}5x + 430$. Le coefficient de corrélation linéaire $r$ est telle que : $r^2 = 0{,}9747$.
   a) Donner une interprétation de cette valeur de $r$ .
   b) Dans ce cas, quelle prévision peut-on faire en 2020 avec cet ajustement ?
6) Comparer les résultats des questions 4 et 5.

**Problème :** ***Fonction logarithme*** **(10 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 5x + 5 - \ln(x-1)$$

$(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;I,J)$ d'unités : sur l'axe des abscisses 1 cm et sur l'axe des ordonnées 2 cm.

**Partie A** : *Etude de la fonction* $f$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   b) Vérifier que $f(x) = x^2\left(-1 + \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{\ln(x-1)}{x^2}\right)$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]1;+\infty[$.

   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(-x+2)(2x-3)}{x-1}$

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$ et en déduire les variations de $f$ sur $]1;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau complet des variations de $f$ sur $]1;+\infty[$.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]5;+\infty[$

   b) En déduire que $5{,}61 < \alpha < 5{,}62$

4) Déterminer les points de $(C_f)$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

5) Construire $(C_f)$ et ses tangentes dans le repère $(O;I,J)$.

**Partie B** : *Calcul d'une intégrale*

Soit les fonctions $g$ et $G$ définies sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x-1)$ et $G(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$

1) Prouver que $G$ est une primitive de $g$ sur $]1;+\infty[$.

2) En utilisant le résultat précédent, déterminer une primitive de $f$ sur $]1;+\infty[$.

3) On pose : $I = \int_2^3 f(x)dx$.

   a- Calculer $I$

   b- Interpréter graphiquement ce résultat.