MATHEMATIQUES A1-B

5ème Demi-journée

(DJ5)

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2^{e} groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

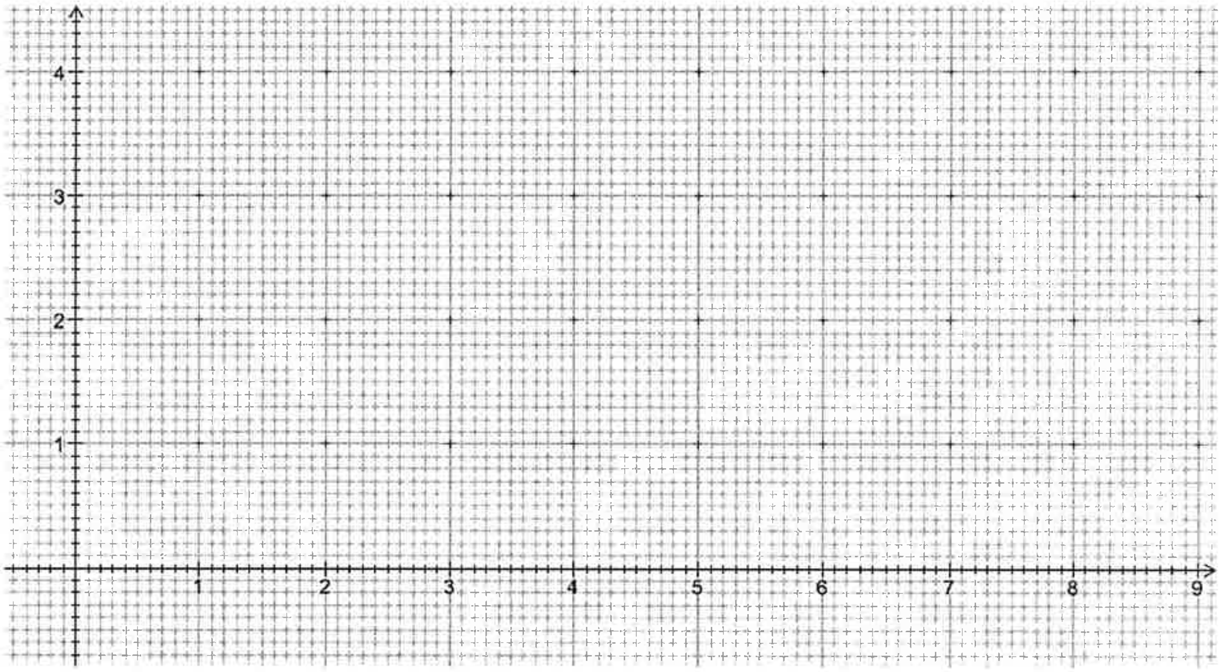
Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Le tableau suivant indique l'évolution des prix d'une denrée alimentaire 2005 à 2012 :

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix en millier de franc CFA (y_i)	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	2,2	3,5

1) Compléter le nuage de points M(x_i ; y_i) dans le plan rapporté au repère orthogonal ci-dessous.



2) On ajuste le nuage de points par la droite Mayer.
   a. Déterminer l'équation de cette droite qui est de la forme $y = ax + b$.
   b. Tracer la.
   c. En utilisant cette droite d'ajustement affine, déterminer le prix prévisible en 2015.

3) En utilisant l'équation de la droite $y = 0{,}2167x + 1{,}725$ estimer le prix d'un paquet de cigarettes en 2015.

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 100(2x - 5)e^{-x}$$

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2) Quelle est l'interprétation graphique ?
3) Montrer que $f'(x) = 100(-2x + 7)e^{-x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
4) Dresser le tableau des variations de f.
5) Déterminer deux nombres réels c et d tels que la fonction F, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = 100(cx + d)e^{-x}$, soit une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.
6) Calculer la valeur exacte de I

$$I = \int_0^1 100(2x - 5)e^{-x}dx$$

Baccalauréat 2012 série A&B
Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

> Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
> Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in]-\infty\ ;2]$

   $f(x) = -x + 7$ pour $x \in]2\ ;+\infty[$

   Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

   Cette fonction est-elle continue ? Pourquoi ?

2) On considère le tableau de variations d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		-2		1		4		$+\infty$
g	$+\infty$						-2				
		↘	1	↘		↗		↘	-6	↘	
					-4						$-\infty$

   a) Recopier le tableau ci-dessous en le complétant avec une ligne donnant le signe de la dérivée g' de g.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$g'(x)$				

   b) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$ et donner les intervalles dans lesquelles elles se situent.

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Soit f la fonction de variable réelle x, définie sur 3 par :

$$f(x) = e^x(e^x + a) + b$$

Où a et b sont deux constantes réelles.

Les renseignements connus sur f sont donnés dans le tableau de variations ci-dessous :

tableau de variation de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

1) Montrer que $f'(x) = e^x(e^x + a)$.
2) Donner, en utilisant le tableau de variation, $f'(0)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3) En s'aidant de $f'(0)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, déterminer a et b.
4) Calculer $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
5) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de variation de f.
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x(e^x - 2) - 3 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).
7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
   a) $e^x(e^x - 2) - 3 \geq -4$;
   b) $e^x(e^x - 2) - 3 \leq 0$.

Epreuve orale de Maths du 2[e] groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Soit f une fonction définie sur $]1;+\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on admet que, pour tout x élément de $]1;+\infty[$, f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x)=ax+\frac{b}{x-c}$, où a, b et c sont trois réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir d'indications fournies par le tableau de variations de f.

On appelle C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

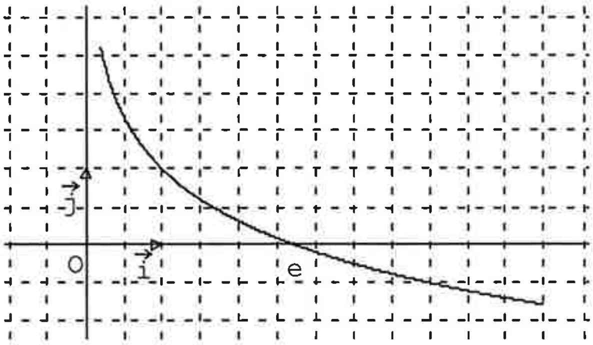
1) Quel est le nombre de solutions dans $]1;+\infty[$ de l'équation $f(x) = 3$? Expliquer.
2) Utiliser le tableau de variations pour justifier l'existence d'une droite D asymptote à C.
   Donner une équation de D.
3) En déduire la valeur de c.
4) A partir de cette question, on suppose que $c = 1$.
   a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de b.
   b) A l'aide du tableau, trouver deux relations entre a et b. Calculer alors a et b.
5) A partir de cette question, on suppose que $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x-1}$.
   a) Montrer que la droite D' d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à C.
   b) Résoudre dans $]1;+\infty[$ l'équation $f(x) = 3$.
   c) Calculer $f'(x)$.
   d) Déterminer une équation de la droite T, tangente à C au point d'abscisse 2

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice



Le repère utilisé est orthonormal : unité : 1 cm.
La figure ci-contre est la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln x$$

1) Démontrer par le calcul que f est monotone sur $]0;+\infty[$.
2) En déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$.
3) L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est une primitive de f. Justifier que l'une des courbes ne peut convenir.

Figure 1 :

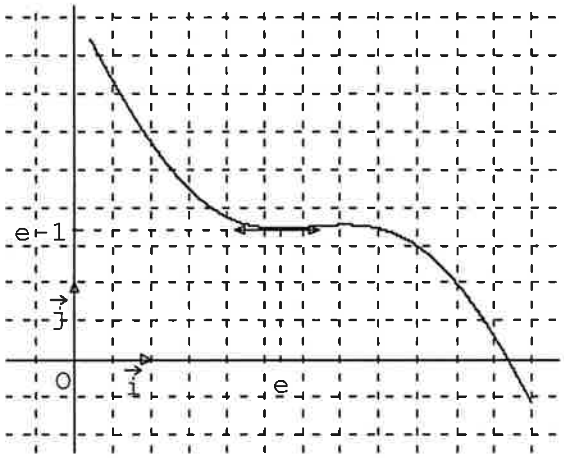
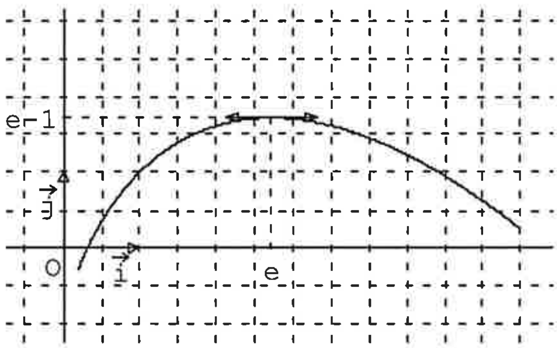


Figure 2 :



4) Notons g la primitive de f. g est définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = ax\ln x + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
   a) Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.
   b) En déduire les valeurs de a et de b.
5) Sur le graphique, on observe que $g(e) = e - 1$. En déduire la valeur de c.

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Questions de cours

1) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ?
2) Quelles sont ses limites aux bornes de son ensemble de définition ?
3) On admet qu'elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. Quelle est sa fonction dérivée ?
4) Quelles sont ses variations sur son ensemble de définition ?

Exercice

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = x - 2$
2) Donner l'ensemble de définition de l'équation :

   $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$

3) En utilisant les deux questions précédentes, résoudre l'équation :

   $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x - 2)$

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

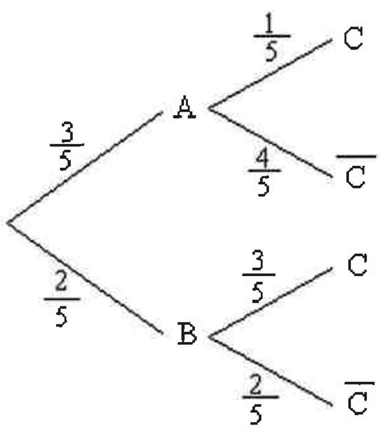
Un client désirant louer une voiture auprès de la société Alizé doit formuler sa demande en précisant deux critères :

- ▶ la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;
- ▶ l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.
On note C l'événement : « la voiture est climatisée ».

1) Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

2) Dans cette question, on donnera les résultats numériques exacts.
   On choisit au hasard un client et on définit les événements suivants :
   E : « le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »,
   F : « le client a choisi une voiture climatisée ».
   a) Déterminer la probabilité des événements E et F.
   b) Quelle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?



Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2[e] groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Pour chacune des deux questions suivantes, indépendantes l'une de l'autre, il vous est proposé plusieurs affirmations. Répondre par OUI ou NON à chaque affirmation en cochant la case qui convient.

Question 1

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a donné ci-dessus le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$. On appelle (C_f) sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On peut affirmer que :	OUI	NON
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe (C_f)		
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C_f)		
La tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -3x$.		
L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.		
L'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique dans $]0\ ;\ 1[$.		
La droite d'équation $y = 2$ coupe la courbe (C_f) exactement en trois points		

Question 2

Soit g une fonction dérivable et strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. On peut alors affirmer que :	OUI	NON
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$		
pour tout réel x de $]1\ ;\ +\infty[$, $g(x) > g(1)$		

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$
2) En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :
   a. $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$
   b. $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2$
3) Déterminer le signe de l'expression définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$A(x) = (x^2 - 4x - 5)\ln x.$$

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Répondre en cochant la case de la réponse exacte.

1) Soit a un réel strictement positif : $\ln\left(\frac{a^2}{5}\right)$ = ...

☐ $2(\ln a - \ln 5)$ ☐ $\left(\ln\frac{a}{5}\right)^2$ ☐ $\ln(a^2) - 2\ln 5$

2) La fonction f telle que $f(x) = \ln(-x)$

☐ n'est définie pour aucun réel

☐ est définie sur $]-\infty\,;1[$

☐ est définie sur $]-\infty\,;0[$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^x)$ ☐ 0 ; ☐ $+\infty$; ☐ $-\infty$

4) L'ensembles des solutions de l'inéquation $1 - x\ln 2 \geq 0$ est :

☐ $]-\infty\,;\frac{1}{\ln 2}[$; ☐ $[\frac{1}{\ln 2}\,;+\infty[$; ☐ $]0\,;\frac{1}{\ln 2}[$

5) Dans le plan muni d'un repère orthonormal D est la droite d'équation $y = x + 3$ et C la courbe représentative de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x) = 3 + x - 2e^{-x}$

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

☐ la droite D est asymptote oblique à C en $+\infty$

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2e groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

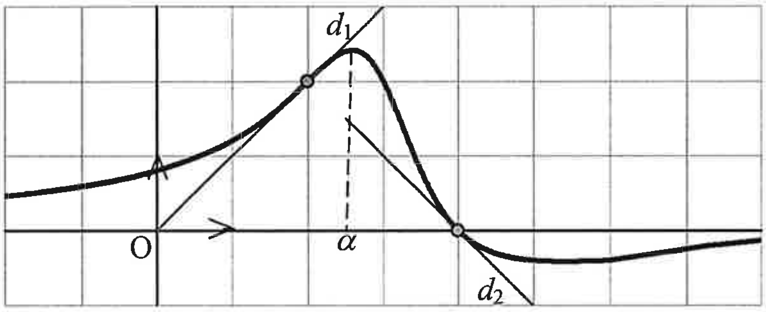
Exercice

Répondre en cochant la case de la réponse exacte.

1) La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-x} + x$

- ☐ A pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = 1 - 2x$. V ☐ ; F ☐
- ☐ A pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 1$ V ☐ ; F ☐
- ☐ Est sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$ V ☐ ; F ☐
- ☐ Est sous l'asymptote au voisinage de $-\infty$ V ☐ ; F ☐

2) La figure suivante donne la représentation graphique d'une fonction g dans un repère orthonormé.



La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
Les droites d_1 et d_2 sont tangentes à la courbe.
On note g' la dérivée de la fonction g.

- ☐ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ V ☐ ; F ☐
- ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ V ☐ ; F ☐
- ☐ $g'(x) < 0$ pour $x > 4$ V ☐ ; F ☐
- ☐ $g'(x) < 0$ pour $\alpha < x < 4$ V ☐ ; F ☐
- ☐ $g'(2) = 1$ V ☐ ; F ☐
- ☐ $g'(4) = 0$ V ☐ ; F ☐

3) La courbe représentative de la fonction ln admet une tangente de coefficient directeur 3 au point A de coordonnées :

A$(3 ; \ln e^3)$ V ☐ ; F ☐

4) La tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse e passe par l'origine du repère. V ☐ ; F ☐

5) -4 et 3 sont solutions de l'équation $\ln[(x-2)(x+3)] = \ln 6$ V ☐ ; F ☐

6) -4 et 3 sont solutions de l'équation $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 6$ V ☐ ; F ☐

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2^{e} groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Soit P le polynôme définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$
ou par : $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$.

1) Déterminer l'ensemble S des solutions réelles de l'équation $P(x) = 0$.

2) Déterminer l'ensemble S' des solutions réelles de l'équation :

$$2\,e^{3x} + e^{2x} - 5\,e^{x} + 2 = 0\ .$$

3) Déterminer l'ensemble S'' des solutions réelles de l'équation :

$$2\,(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0\ .$$

4) Déterminer l'ensemble S''' des solutions réelles de l'équation :

$$2\ln(x) + \ln(2x+1) = \ln(5x-2)\ .$$

Epreuve orale de Maths du 2[e] groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

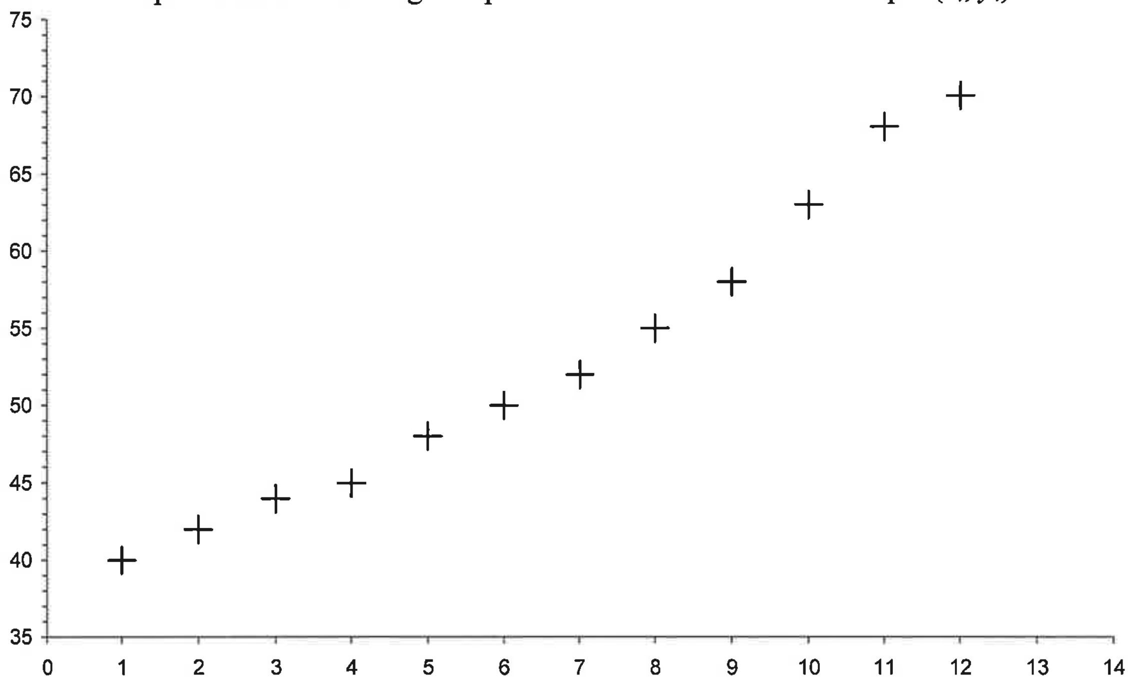
Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Un organisme financier a besoin de prévoir en fonction du montant des prêts accordés quelle somme il doit lui-même emprunter sur les marchés financiers. Pour cela il réalise une étude sur les 12 derniers trimestres écoulés. Le montant global des prêts accordés chaque trimestre est donné en millions d'euros.

Trimestres	4e T-09	1er T-10	2e T-10	3e T-10	4e T-10	1er T-11	2e T-11	3e T-11	4e T-11	1er T-12	2e T-12	3e T-12
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Montant y_i	40	42	44	45	48	50	52	55	58	63	68	70

Représentation du nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i)



1) On envisage de résumer quantitativement l'observation faite à l'aide d'une droite qui ajuste au mieux les 12 points du nuage.
   a) Donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés, la représenter sur le graphique.
   $$\sum x_i = 78 \; ; \; \sum y_i = 635 \; ; \; \sum x_i y_i = 4520 \; ; \; \sum x_i^2 = 650 \; ; \; \sum y_i^2 = 34715$$
   b) Donner une estimation du montant des prêts accordés pour le quatrième trimestre 2012.
2. Cette extrapolation des données repose sur les 12 trimestres précédents, mais pour tenir compte des évolutions récentes, on peut se limiter aux quatre derniers trimestres.
   a) Avec les quatre derniers trimestres, donner une équation de la droite (D) d'ajustement par moindres carrés. Représenter (D) sur le graphique précédent.
   b) Sous l'hypothèse que cette tendance se maintienne, donner une prévision pour le quatrième trimestre 2012.
3. Commenter ces deux estimations.

Baccalauréat 2012 série A&B

Epreuve orale de Maths du 2^{e} groupe. Préparation : 20 min. Entretien : 20 minutes

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien où vous serez amené à justifier vos réponses. La démarche et la pertinence de la justification seront valorisées. Vous devrez rendre ce sujet à la fin de l'épreuve mais vous pouvez écrire dessus.

Exercice

Monsieur X a placé 200 000 f CFA le 31 décembre 2007 sur son livret bancaire à intérêts composés au taux annuel de 3,5% (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). A partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 70 000 f supplémentaires sur ce livret.

On désigne par C_n le capital, exprimé en franc CFA, disponible le 1er janvier de l'année (2003+n), où n et un entier naturel. Ainsi, $C_0 = 200\,000$.

1) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2009.
2) Etablir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = C_n + 2\,000\,000$.
   a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   b) Exprimer U_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$C_n = 2\,200\,000 \times 1{,}035^n - 2\,000\,000$$
   d) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2012 (on arrondira le résultat à francs près).