REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session: 2020
Série: B
Coef.: 3
Durée: 3heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé, cependant les calculatrices des smartphones, tablettes et autres appareils multimédia ne sont pas autorisées

EXERCICE 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question posée, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule des trois réponses est correcte. Sans justifications, le candidat notera sur sa copie le numéro de chaque question traitée et la lettre désignant la réponse choisie. Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou une absence de réponse vaut zéro point.

<table>
<tr><th>N°</th><th>Enoncé de la question</th><th colspan="2">Réponses proposées</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Soit la série statistique à deux variables :
x_i : 2 ; 7 ; 12 ; 19
y_i : 5 ; 20 ; 31 ; 49
Le point moyen G de cette série à pour coordonnées :</td><td>A</td><td>$(10; 26)$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$(10;\ 26,25)$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$(26,25;\ 10)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">On considère le nombre $A = \ln 72$.
A est égal à:</td><td>A</td><td>$2\,ln\,3 + 3\,ln\,2$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$2\,ln\,3 \times 3ln\,2$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$2\,ln\,3 - 3\,ln\,2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">Après une interrogation écrite de rattrapage notée sur 10, un professeur a obtenu la série de notes suivantes :
2 ;2 ;2 ;2 :4 ;4 ;4 ;5 ;5 ;9 ;9 ;9.
La variance de cette série de notes est environ égale à :
On rappelle que la variance $V(X)$ d'une série statistique X de moyenne $\bar{x}$ et d'effectif total N vaut :
$V(X) = \frac{n_1(\bar{x}-x_1)^2 + n_2(\bar{x}-x_2)^2 + \cdots + n_k(\bar{x}-x_k)^2}{N}$</td><td>A</td><td>2,68</td></tr>
<tr><td>B</td><td>4,75</td></tr>
<tr><td>C</td><td>7,19</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">La forme factorisée du polynôme P définie par :
$P(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ est :</td><td>A</td><td>$(x+2)(x-3)(x-4)$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$(x-2)(x+3)(x-4)$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$(x-2)(x-3)(x-4)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">L'équation $ln(x^2 - 4) = ln3x$ a pour ensemble solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>A</td><td>$\{-1 ; 4\}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\{4\}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Ensemble vide</td></tr>
</table>

EXERCICE 2 : suite arithmético-géométrique **(4 points)**

Le but de cet exercice est de déterminer, à l'aide d'une suite arithmético-géométrique, le nombre d'année à partir duquel un cultivateur pourrait fournir une quantité de produit agricole donnée.

M. MBA-NDINGA, cultivateur gabonais, a une plantation de 2000 cacaoyers. Une étude a montré que chaque année il perd 10% de ses arbres (maladies, vieillissement d'anciens plants, intempéries ...). M. Mba-Ndinga plante 80 nouveaux cacaoyers chaque année.

Partant de l'année 2019, on note U_n le nombre de cacaoyers dans le champ de M. Mba-Ndinga à l'année 2019+n. On a donc $U_0 = 2000$.

1) Monter que le nombre de cacaoyer U_1 à l'année 2020 est : $U_1 = 1880$.
2) On suppose que le nombre de cacaoyers dans le champ de Monsieur Mba-Ndinga l'année 2019+n+1 est donné par la formule : $U_{n+1} = 0{,}9U_n + 80$. Calculer U_2.

Pour déterminer le nombre de cacaoyers U_n en fonction de l'année n, on considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 800$

3) a) Calculer le terme V_0.
   b) Montrer que $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{9}{10}$.
   c) En déduire que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et de premier terme.
d) En déduire une expression de V_n en fonction de n.
e) Montrer que le nombre de cacaoyers U_n en fonction de l'année n est donné par la formule : $U_n = 800 + 1200 \times 0{,}9^n$.
f) Quel nombre de cacaoyers aura M. Mba-Ndinga en 2025 ? (On donnera le résultat à l'entier supérieur).
g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Problème : Etude d'une fonction logarithme **(8 points)**

Partie A : Etude de la fonction f

1) On considère la fonction f définie sur $D_f =]0; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 3 + \ln x$.
(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique un centimètre.

   a) Calculer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
   b) En remarquant que pour $x \in]0\,; +\infty[$, $f(x) = x\left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$, calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ $\left(\text{On rappelle que } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$.

2) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Justifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-x+1}{x}$

3) Déterminer le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$.

4) a) Calculer $f(1)$.

b) Montrer que sur $[1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (que l'on notera α). Puis montrer que $4,5 < \alpha < 4,6$.

c) Justifier que pour tout $x \in [1; \alpha[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) < 0$.

Partie B : Etude de la fonction *F*.

On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + x\ln x$

1) a) Calculer $F(1)$.

b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[1, +\infty[$ $F(x) = x^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{lnx}{x}\right]$, puis en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.

c) Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur $[1, +\infty[$

2) En s'aidant de la première question de la **partie B**, donner les variations de F sur $[1, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

3) On admet que la fonction f est positive sur $[1; 3]$. Calculer alors l'aire du domaine, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 3$.

4) Reproduire puis compléter le tableau des valeurs suivant :

x	1	2	3	4	$\alpha \approx 4,55$	5	6
F(x)							

On donne : $\boldsymbol{ln2 \approx 0,7; ln3 \approx 1; ln4 \approx 1,4; ln5 \approx 1,6; ln6 \approx 1,8}$

5) Tracer dans le repère (O, I, J) une esquisse de la courbe (C_F), représentation graphique de la courbe de F .