REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : Juin 2024
Série : B
Coéf. : 3
Durée: 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1 : QCM (5 points)

Pour chaque question, le candidat doit indiquer sur sa copie, le numéro de la question et la lettre ou la réponse correspondant à son choix. **Aucune justification n'est demandée.**

Une bonne réponse rapporte **1 point**, une mauvaise ou une absence de réponse rapporte **0 point**.

1) Soit h la fonction exponentielle et h' sa fonction dérivée. Pour tout réel $x > 0$:

A. $h'(x) = \ln x$;
B. $h'(x) = e^x$;
C. $h'(x) = \frac{1}{x}$;
D. $h'(x) = -e^x$.

2) (u_n) est la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3$.
Pour tout entier naturel n,

A. $u_{n+1} = 3u_n + 4$;
B. $u_{n+1} = 4u_n$;
C. $u_{n+1} - u_n = 4$;
D. $u_{n+1} = u_n + 3$.

3) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 0{,}2 - 0{,}2^n$

A. $\lim u_n = 0{,}2$;
B. $\lim u_n = 0$;
C. $\lim u_n = -\infty$;
D. $\lim u_n = +\infty$.

4) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4$. (C) est sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O ; I, J). Le point $E(1;3)$

A. est le sommet de la courbe (C) ;
B. appartient à la courbe (C);
C. n'appartient pas à la courbe (C);
D. est le centre de symétrie de (C).

5) Une série statistique (x, y) dont les valeurs de x sont $1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 11$ et 13 est ajustée par la droite d'équation $y = 1{,}35x + 22{,}8$. Le point moyen G de cette série a pour couple de coordonnées :

A. $(6{,}5\,; 30{,}575)$;
B. $(31{,}575\,;\ 6{,}5)$;
C. $(6{,}5\,; 31{,}575)$;
D. $(30{,}575\,; 6{,}5)$.

Exercice 2. Probabilités (5 points)

Dans un lycée, on interroge les élèves de terminale B sur leurs intentions d'orientation post-bac après le conseil de classe du troisième trimestre. On compte parmi ces élèves 55% de filles. Nous savons également que

- 85% des filles souhaitent s'inscrire en BTS ou en DUT.
- 70% des garçons souhaitent cette même orientation.

On choisit une fiche au hasard. Chaque fiche a la même probabilité d'être choisie.

On note A, et E les évènements suivants :

- A : « l'élève est une fille » ;
- E : « l'élève souhaite s'inscrire en BTS ou en DUT » ;

On rappelle que $p_R(T) = p(T|R)$ désigne la probabilité de l'évènement T sachant que l'évènement R est réalisé.

1) Définir à l'aide d'une phrase l'événement $\bar{A}$, événement contraire de A.
2) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
3) Définir par une phrase l'évènement $A \cap E$.
4) Déterminer $p(A \cap E)$ et $p(\bar{A} \cap E)$; en déduire $p(E)$.
5) Calculer $p_E(A)$ et $p_E(\bar{A})$ puis les comparer. Que peut-on en conclure ?

Problème : Fonction logarithme népérien (10 points)

Partie A : Etude d'une fonction intermédiaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \ln x$$

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) g' est la fonction dérivée de g sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que : $g'(x) > 0$
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1\,;\,2[$.
5) Prouver que g est négative sur $]0\,;\,\alpha[$ et positive sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = -x + (x-1)\ln x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 centimètre.

1) Calculer la limite de f en 0.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(-1 + \ln x - \frac{\ln x}{x}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Montrer que la fonction dérivée f' de f vérifie : $f'(x) = g(x)$.

4) En utilisant la question **5)** de la **Partie A**, dresser le tableau de variation complet de f. On prendra $\alpha = 1{,}7$ et $f(\alpha) = 1{,}3$.

5) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$							

6) Tracer la courbe (C).

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : 2024
Série : A1
Coéf.: 4
Durée: 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'épreuve comporte quatre exercices (pages 1à 3) .

Exercice 1 : Q.C.M

5 points

Dans chacune des questions suivantes, quatre réponses (A, B, C ou D) sont proposées et **une seule réponse est correcte**. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse est notée 0. Pour chacune de ces questions, **sur votre copie d'examen, reportez simplement le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse (Exemple : 6-Réponse D).** Si plusieurs lettres sont reportées, la réponse sera considérée comme fausse. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_1 = 2$ et de raison **r = 5.** La somme S des **12** premiers termes de cette suite est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
120	354	372	684

2. Soit la série statistique suivante : x ; 14 ; 18,3 ; 26,7; y.
Sachant que l'étendue de cette série est de 25, et la moyenne est de 20, les valeurs de x et de y sont :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$x = 8\ et\ y = 25$	$x = 8\ et\ y = 33$	$x = 20\ et\ y = 25$	$x = 25\ et\ y = 41$

3. L'ensemble solution de l'équation E : $\ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x+11)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\{-5; 1\}$	$\{-3; -2\}$	$\{1\}$	$\{5; 11\}$

4. La valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 e^{2x}dx$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
3,19	$e^2 - 1$	$\frac{1}{2}e^2$	$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0{,}62$. L'espérance mathématique de X est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0,124	3,1	6,515	8,06

Exercice2 : **Polynômes et fonctions exponentielle et logarithme népériens** **5 points**

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x + 42$.

1. Calculer $P(-2)$ et interpréter le résultat.
2. Trouver trois nombres réels a, b et c tels que l'on ait pour tout nombre réel x : $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.
3. Factoriser $P(x)$ en produit des facteurs des polynômes du premier degré.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $P(x) = 0$.
   b) $P(x) = 42$.
5. On admet que -2; 3 et $\frac{7}{2}$ sont les racines du polynôme P. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) (E_1): $2e^{3x} - 9e^{2x} - 5e^x + 42 = 0$.
   b) (E_2): $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 5\ln x + 42 = 0$.

Exercice 3 : ***étude d'un fonction logarithme népérien*** **5 points**

Avant l'épreuve de Mathématiques du baccalauréat session 2024, deux candidats de la série A1, discutent de la note à espérer en Mathématiques afin d'être au moins admissible.

Un des deux élèves affirme : « si tu as une note égale à **un (1) sur 20** en maths au bac cette année, ne rêve plus à ton admission au premier tour ».

Afin de modéliser la chance (en pourcentage) d'être au moins admissible au baccalauréat en fonction de la note à l'épreuve de Mathématiques du candidat, on considère la fonction f définie sur $[1; 20]$ par :

$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$.

1. Calculer $f(1)$ et conclure sur l'affirmation citée plus haut.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in [1; 20]$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, où f' est la fonction dérivée de f sur $[1; 20]$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[1; 20]$.
4. En déduire le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $[1; 20]$.
5. Montrer que la chance (en pourcentage) d'être au moins admissible pour un candidat qui a obtenu la note de 5/20 est proche de 81%.

Exercice 4 : Probabilité conditionnelle, loi binomiale **5 points**

Dans un lycée de la place, les statistiques annuelles des 120 élèves de la série A1, révèlent les résultats suivants :

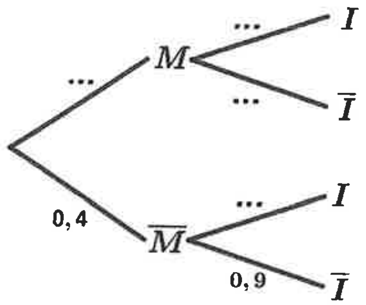
- 40% des élèves ont obtenu une moyenne annuelle strictement inférieure à 10.
- Parmi les élèves ayant obtenus une moyenne supérieure ou égale à 10, le quart a reçu une préinscription des universités étrangères.
- Les 90% des élèves n'ayant pas obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10 n'ont pas eu une préinscription pour une université étrangère.

On note les évènements suivants :

M : « L'élève a obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10 ».

I : « l'élève a obtenu une préinscription d'une université étrangère ».

1. Recopier et compléter l'arbre des issues possibles, pondéré par les probabilités à partir des données de l'énoncé.



2. On choisit un élève au hasard.
   a) Définir l'événement $M \cap I$.
   b) Calculer la probabilité de $M \cap I$.
   c) Montrer que $P(I)$ est égale à 0,19.
   d) Calculer la probabilité que l'élève choisi ait une moyenne supérieure ou égale à 10 sachant qu'il a obtenu une préinscription.

3. L'attribution de la bourse pour l'étranger concerne uniquement les élèves ayant obtenu une préinscription. On considère que l'attribution d'une préinscription à un élève n'affecte pas les autres élèves.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves ayant une préinscription parmi les 120 élèves de la série.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres à déterminer.
   b) Calculer $P(X = 10)$. Que représente ce nombre ?

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : **Juin 2024**
Série : **D**
Coef.: **4**
Durée: **4 heures**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(l'usage de la calculatrice en mode examen est autorisé)

EXERCICE 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Une réponse correcte vaut **1 point**, une absence de réponse ou une réponse incorrecte vaut **0 point**. Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses est correcte. Sans justification le candidat notera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = -2z + i$.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
f est la similitude directe de centre Ω d'affixe i et de rapport -2.	f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{1}{3}i$ et de rapport -2.	f est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{1}{3}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.	f est la translation de vecteur d'affixe i.

2) Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est fausse ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
F est définie sur $\mathbb{R}$	F est continue sur $\mathbb{R}$	F est croissante sur $\mathbb{R}$	F est une fonction en escalier

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $C(3\,;-7\,;0)\,;T(-3\,;-1\,;-1)\,;R(-2;-1;0)$ et $I(4;4;-3)$ alors le tétraèdre $CTRI$ a pour volume :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{70}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{79}{6}$	$\frac{31}{6}$

4) On considère la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \tan t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Le vecteur dérivé en $t = \frac{\pi}{4}$ est le vecteur $\vec{V}_{\frac{\pi}{4}}$ tel que :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\vec{V}_{\frac{\pi}{4}}\left(1; \frac{\pi^2}{16}\right)$	$\vec{V}_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi^2}{16}; 1\right)$	$\vec{V}_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$	$\vec{V}_{\frac{\pi}{4}}\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$

5) On considère la série statistique double suivante :

x_i	1	3	7	12	9	15	18	23
y_i	29	21	16	10	14	8	6	4

La droite de Mayer associée à cette série a pour équation :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$y = -\frac{13}{12}x + \frac{305}{12}$	$y = -\frac{22}{21}x + \frac{1051}{42}$	$y = -\frac{22}{21}x + \frac{305}{12}$	$y = -\frac{13}{12}x + \frac{1051}{42}$

EXERCICE 2 : Suite et Nombres complexes (5 points)

1) Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel.

Démontrer par récurrence que : $argZ^n = n\, argZ$.

2) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, & si\ n = 0 \\ z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_n, & \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On note M_n l'image de z_n dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Placer les points M_0 ; M_1 et M_2.

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_n = e^{-i(\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})}$.

c) En déduire que les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

3) a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_{n+6} = -z_n$.

b) En déduire que O est milieu du segment $[M_n M_{n+6}]$.

4) a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{z_{n+8}-z_n}{z_{n+4}-z_n} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) En déduire la nature du triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

PROBLEME : Exponentielle népérienne (10 points)

Partie A : Equation différentielle

On donne l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).
2) Déterminer la fonction g solution de (E), de représentation graphique (C_g), telle que le point $A(0; 1)$ soit un point de (C_g) et que la tangente à (C_g) au point A ait pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

Partie B : Etude de la fonction $f = |g|$

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right| e^{-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan.

1) Justifier que : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) e^{-x}, \text{si } x \geq -2 \\ f(x) = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-x}, \text{si } x < -2 \end{cases}$
2) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique du résultat.

3) Calculer la limite de f en $-\infty$.
4) Etudier la continuité de f en -2.
5) Etudier la dérivabilité de f en -2.
6) Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f.
7) Dresser le tableau de variation de f.
8) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
9) Construire (T) et (C) sur le même graphique.

Partie C : Calcul d'aire

Soit α un nombre réel strictement positif.

1) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.
2) Calculer, en fonction de α et en unité d'aire, l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
3) Calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : 2024
Série : D
Coef.: 4
Durée: 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(l'usage de la calculatrice en mode examen est autorisé)

EXERCICE 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Une réponse correcte vaut **1 point**, une absence de réponse ou une réponse incorrecte vaut **0 point**. Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses est correcte. Sans justification le candidat notera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1) Soit $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ de coordonnée $(x'(t_0); y'(t_0))$ désigne vecteur dérivé au point $M(t_0)$ et (T) la tangente à la courbe (Γ) au point $M(t_0)$ si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors (T) a pour équation :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$	$x = x(t_0)$	$y = y(t_0)$	$y = y'(t_0)$

2) Si le coefficient de corrélation de x et y noté $r = -0{,}95$ alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Les valeurs prises par y ont tendance à croitre quand les valeurs de x augmentent.	Les variations des variables x et y sont indépendantes.	Les valeurs prises par y ont tendance à décroître quand les valeurs de x augmentent.	La corrélation est faible.

3) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 2 et six portent le chiffre 3. On tire simultanément deux boules. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus après tirage . $p(X = 5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$

4) Les racines cubiques du nombre complexe $2 + 2i$ sont :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$z_k = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{1; 2; 3\}$	$z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2\}$	$z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{1; 2; 3\}$	$z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2\}$

5) L'espace est muni d'un repère orthonormé, la distance du point $M(-1; 0; 1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{3}$

EXERCICE 2 : **Nombre complexes et suite (6 points)**

1) Restitution organisée des connaissances :
   a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, M est point d'affixe z et M' le point d'affixe z', l'image de M par la similitude directe s de centre Ω, d'angle θ et de rapport k.
   Démontrer que s a pour écriture complexe $z' = az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).
   b) Soit n un entier naturel non nul et q un nombre réel différent de 1.
   Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2) Dans la suite de l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4i,\ z_1 = -1-4i,\ z_2 = -4-i$.
   a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que :
   $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$
   b) Montrer que l'écriture complexe de S est $f(z)\colon z' = \frac{1}{2}[(1-i)z + i - 3]$.
   c) En déduire le rapport et l'angle de la similitude S.
   d) Montrer que l'affixe ω du centre Ω de la similitude S vaut : $\omega = -1+2i$.
   e) On considère un point M d'affixe z avec $z \neq 0$ et son image M', d'affixe z'.
   Vérifier la relation $-1+2i-z' = i(z-z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

3) Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1} est défini par :
   $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_nA_{n+1}$ où A_n et A_{n+1} sont les points d'affixes respectives z_n , z_{n+1} et (u_n) est une suite numérique.
   a) Placer, dans le repère$(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A_0, A_1, A_2 et construire les points A_3, A_4.
   b) Justifier que : $u_n = \Omega A_{n+1}$.
   c) Montrer que : $|z_{n+2} + 1 - 2i| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1} + 1 - 2i|$.
   d) En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

4) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   où (u_n)est la suite définie plus haut.
   a) Exprimer v_n en fonction de n.
   b) La suite (v_n) est –elle convergente ?

PROBLEME : Equation différentielle et étude fonction (9 points)

Partie A :

1) Déterminer les solutions h sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E): y'' + 4y' + 4y = 0$$

2) On considère l'équation différentielle $(F): y'' + 4y' + 4y = -4x + 4$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $u: \mapsto ax + b$ soit solution de (F).
   b) Montrer qu'une fonction g est solution de (F) si et seulement si $g - u$ est solution de (E).
   c) En déduire toutes les solutions de (F).
   d) Donner la solution g de (F) qui vérifie : $g(0) = 3$ et $g'(0)$=-2, où g' est la fonction dérivée de g.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-2x} + 2 - x$
On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. On veut étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1) Etude du signe de la fonction f', dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Montrer que f' est négative sur $[0; +\infty[$.
2) Calculer la limite de f en $+\infty$.
3) Dresser le tableau de variation complet de f sur $[0; +\infty[$.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ et $2 < \alpha < 2{,}1$.
5) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (d) dont on déterminera une équation.
6) Construire (d) et$(\mathcal{C})$sur un même graphique.

Partie C :

1) En utilisant une intégration par parties, montrer que la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x}$ est une primitive de $(x + 1)e^{-2x}$.
2) Calculer en fonction de α l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : 2024
Série : B
Coef. : 3
Durée : 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1 : QCM

(5 points)

Pour chaque question, le candidat doit indiquer sur sa copie, le numéro de la question et la lettre ou la réponse correspondant à son choix. **Aucune justification n'est demandée.**

Une bonne réponse rapporte **1 point**, une mauvaise ou une absence de réponse rapporte **0 point**.

1. Si E et F sont deux événements indépendants avec $p(E) \neq 0$, alors :
   - **A.** $p(F) = 1 - p(F)$;
   - **B.** $E \cap F = \emptyset$;
   - **C.** $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$;
   - **D.** $p_E(F) = p(E \setminus F) = p(F)$.
2. Une élève de terminale B a calculé le coefficient de corrélation linéaire r d'une série statistique double, et elle a trouvé $r = 0{,}88$. Que peut-on dire de la représentation du nuage de points de cette série statistique ?
   - **A.** Les points du nuage sont confondus ;
   - **B.** Les points du nuage semblent dispersés sans forme apparente ;
   - **C.** Les points semblent alignés ou proches d'une droite ;
   - **D.** On ne peut rien dire.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+1)$ admet :
   - **A.** Aucune racine ;
   - **B.** Une racine ;
   - **C.** Deux racines ;
   - **D.** Trois racines.
4. Soit f la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle. Pour tout réel x, on a :
   - **A.** $f(x) = e^{-x}$
   - **B.** $f(x) = x$
   - **C.** $f(x) = e^{x}$
   - **D.** $f(x) = \ln x$
5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 4$. La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ vaut :
   - **A.** 275
   - **B.** 250
   - **C.** 45
   - **D.** 230

Exercice 2 : Programmation linéaire

(5 points)

Un boutiquier veut acheter trois modèle de biscuits : L, B et S. Ces biscuits sont vendus en deux conditionnement : des boites cubiques et des boites cylindriques.

Une boite cubique contient 3 kg de modèle L, 2 kg de modèle B et 4 kg de modèle S.

Une boîte cylindrique contient 12 kg de modèle L, 4 kg de modèle B et 3 kg de modèle S.

Ce boutiquier veut au moins 60 kg de modèle L, au plus 32 kg de modèle B et au moins 36 kg de modèle S. On désigne par x le nombre de boites cubiques et y le nombre de boites cylindriques.

1) Justifier que l'ensemble des contraintes d'achat peut s'écrire sous la forme du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 4y \geq 20 \\ x + 2y \leq 16 \\ 4x + 3y \geq 36 \end{cases}$$

2) Représenter dans le plan muni d'un repère orthornormé d'unité le centimètre, l'ensemble des points du plan qui vérifient ce système.
3) Une boîte cubique coute 20 mille et une boite cylindrique 50 mille. Déterminer le nombre de boites de chaque modèle pour que la dépense soit minimale.
4) Calculer cette dépense.

Problème : Fonction logarithme

(10 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(4x^2 + 3) - x$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. On considère le polynôme $P(x) = 4x^2 - 8x + 3$.
   a) Quel est le degré de $P(x)$.
   b) Etudier le signe de $P(x)$ pour tout nombre réel x.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Démontrer que :

$$f(x) = \frac{-P(x)}{4x^2 + 3}$$

c) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $4 < \alpha < 5$. En déduire un encadrement à 10^{-1} près par défaut de α.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Construire la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.